

FACHWERK MATHEMATIK

Bahara
Felix
Francesca
Georg
Maria
Maxi
Tobias

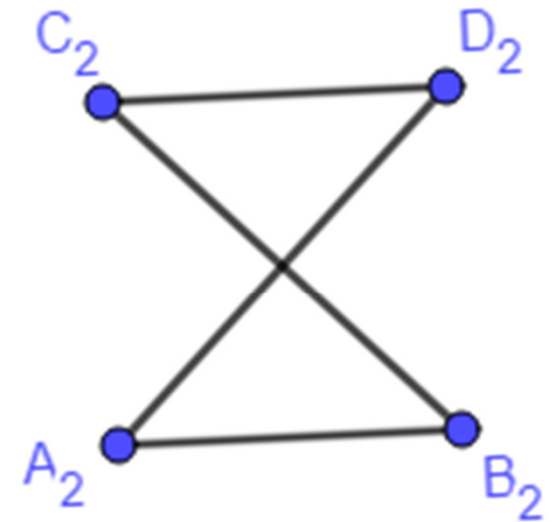
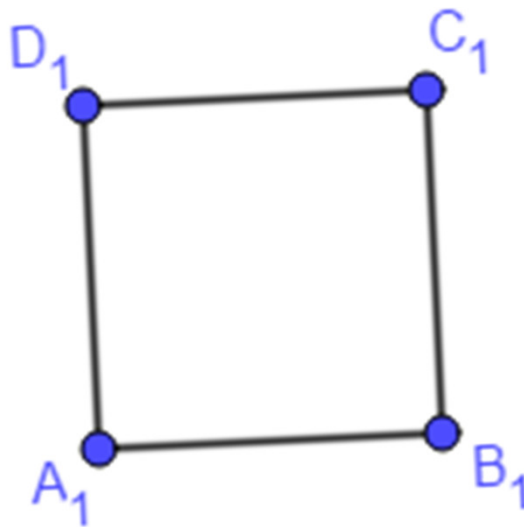


Was ist ein Graph?

- $G=(V,E)$
- V =Menge der Knoten
- E =Menge der Kanten

- **Beispiel**

- $G = [\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\}]$



Stabiler Graph im \mathbb{R}^2

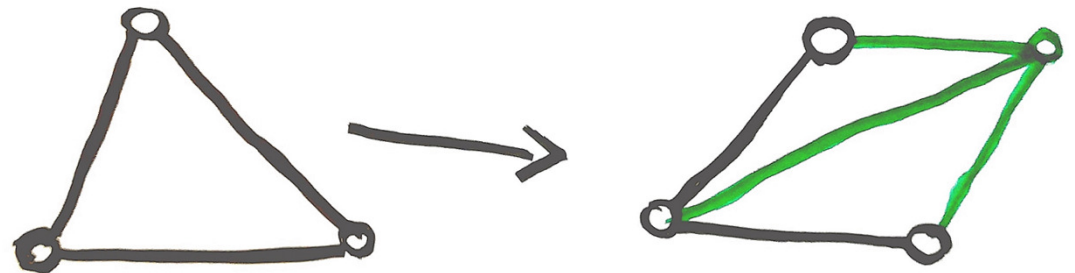
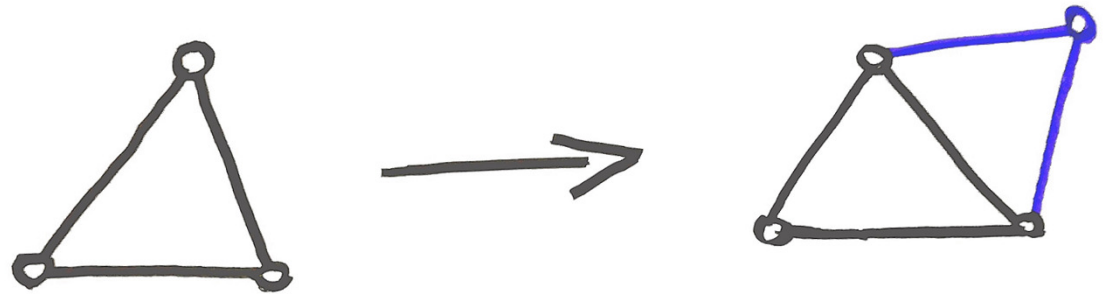
- Einfachster stabiler Graph:

- Dreieck

- Weitere stabile Graphen

- + 2 Kanten & 1 Knoten

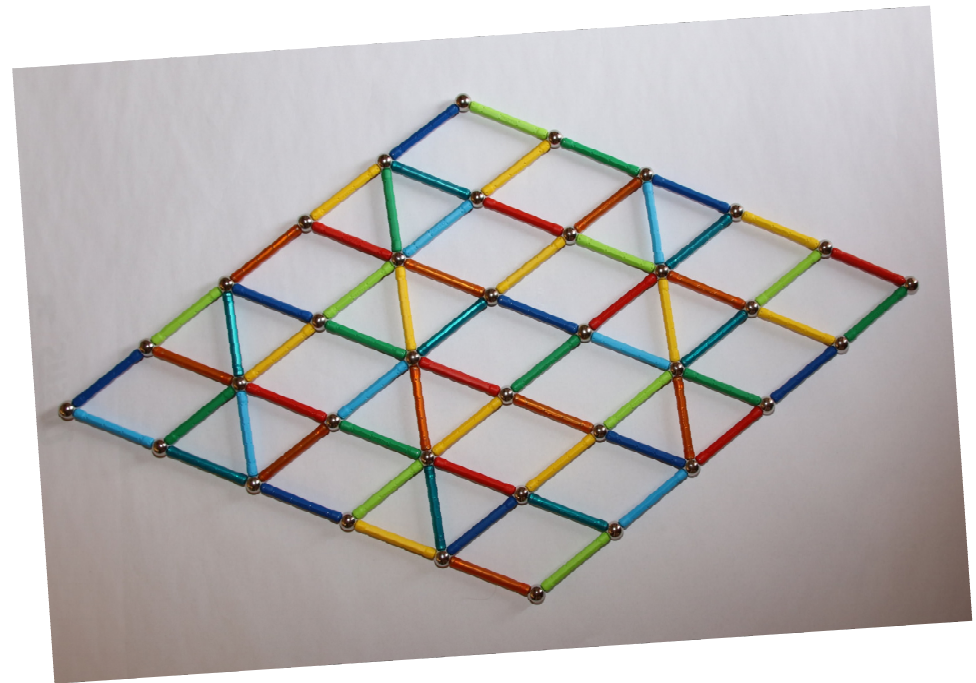
- + 3 Kanten & 1 Knoten – 1 zuvor schon vorhandene Kante





Berechnungen

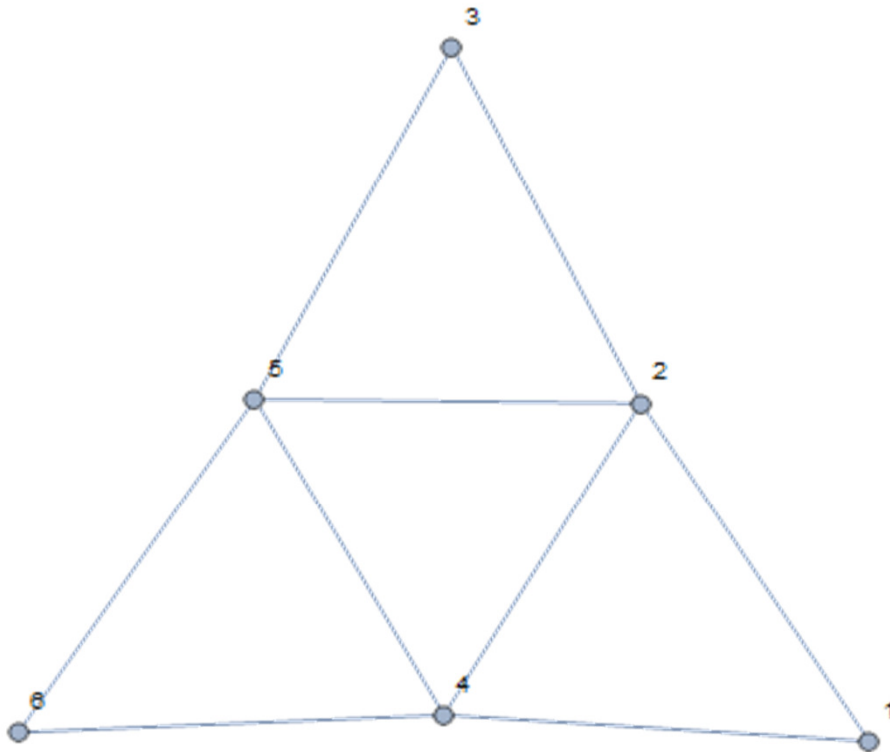
- Knoten- und Kantenanzahl
 - im \mathbb{R}^2
- $|E| = 2|V| - 3$



Gleichungen

```
In[28]:= Gr = Graph[{{1, 2}, {2, 3}, {3, 5}, {5, 6}, {6, 4}, {4, 1}, {2, 5}, {5, 4}, {4, 2}}, VertexLabels -> "Name"]  
[Graph] [Knotenbeschriftungen]
```

Out[28]=



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_{1,2}^2$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = l_{2,3}^2$$

$$(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 = l_{3,5}^2$$

$$(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 = l_{5,6}^2$$

$$(-x_4 + x_6)^2 + (-y_4 + y_6)^2 = l_{6,4}^2$$

$$(-x_1 + x_4)^2 + (-y_1 + y_4)^2 = l_{4,1}^2$$

$$(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 = l_{2,5}^2$$

$$(-x_4 + x_5)^2 + (-y_4 + y_5)^2 = l_{5,4}^2$$

$$(-x_2 + x_4)^2 + (-y_2 + y_4)^2 = l_{4,2}^2$$

Überprüfung der Stabilität

- Gegeben: Graph und Kantenlängen
- Ein Knoten wird im Ursprung fixiert und ein zweiter auf der x -Achse
- Stabil: Eine endliche Anzahl von Lösungen

GröbnerBasis

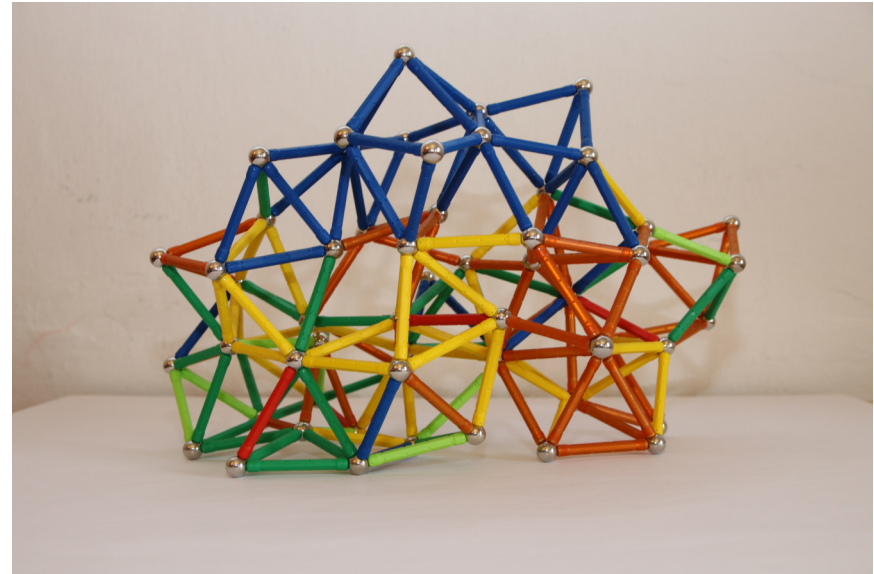
$\{380 x_2 - 3721 x_4, -36897992555710 + 9285383400 y_5^2, 13073190234 y_4 y_6 - 9185346536 y_5 y_6 - 1983921849 y_6^2, -35319508978960 + 9285383400 y_4 y_6 + 7882841754 y_4 y_6 - 5490320616 y_5 y_6 - 1196260569 y_6^2,$
 $49436471720778054461973952000 x_1 y_5 + 32976249762405498031348026400 x_2 y_5 y_6 - 37405507251571517047904799111 x_4 y_6 - 167317574492226677852308857720 x_5 y_6 - 12126092404719933932512163580 x_6 y_6,$
 $13009597821257382753151040 x_4 y_5 + 1985342780220687594365600 x_5 y_5 + 4841091528080402482013867 x_4 y_6 + 8334128095495090893160 x_5 y_6 - 755552765024181806523660 x_6 y_6,$
 $-13251200 + 3721 y_4^2, 87054150534308695309000 x_6 y_4 - 8616769481360685141600 x_6 y_5 + 15070844886778924254349 x_4 y_6 - 30960833853314414114520 x_5 y_6 - 17280683336417298213780 x_6 y_6,$
 $80334266546264338500707672000 x_5 y_4 + 53147156592088925096046133600 x_6 y_5 - 175510344131800441568722118779 x_4 y_6 - 24430583404155935171145125080 x_5 y_6 - 19607029562203939567195012620 x_6 y_6,$
 $105702982297716234869352200 x_4 y_4 + 15996897008617823581445600 x_5 y_5 - 6296550808112967093232959 x_4 y_6 + 5338877771498437056301320 x_5 y_6 - 6220213949589215401573020 x_6 y_6 + 4108926249376970 + 3683975863950 y_3^2 - 4918158074200 y_3 y_5 - 6628107448638 y_4 y_6 + 4616410693752 y_5 y_6 + 1005848377443 y_6^2,$
 $43245473959523739736399268459110496000 x_5 y_3 + 8279120654094462517883977541214112000 x_1 y_4 - 19195694982910779754495670496218912000 x_3 y_5 + 8906271829809684101499162701893680800 x_6 y_5 + 4777551261740543334965375568901092613 x_4 y_6 -$
 $5792412856946007497184425141590121240 x_5 y_6 - 3243059760442712058665791997631286800 x_6 y_5, 5690193942042597337367458498829600 x_4 y_3 - 18541262926958978296226880480880000 x_3 y_4 + 150824001296411539126130160848000 x_3 y_5 + 2681918727594727547482070688400800 x_6 y_5 +$
 $5494848460670740123131887654967813 x_4 y_6 - 2636761832969747486051730355017240 x_5 y_6 - 95416601694934841738072903830860 x_6 y_6, 2394134441752279640928354770467596590243000 x_3 y_3 - 22339692250589124059928411176131460837607000 x_3 y_4 -$
 $24136516329107811563849631811116495438000 x_3 y_5 - 8394495618583341355031442555891802295703200 x_6 y_5 - 41640149828018428266798183940621395268000403 x_4 y_6 + 4693595320256417987755575135777575475910440 x_5 y_6 - 3311604204298526058575856470800836932423340 x_6 y_6,$
 $15663107562923472016 + 723779323787709 x_4 y_5 - 37784080895930326 y_4 y_6 + 4815850917174912 y_5 y_6 + 16660261628184247 y_6^2, 8443984421878234942240 + 43426759427262625400 x_5 y_6 - 7229180402729828706 y_4 y_6 + 2927612640837213024 y_5 y_6 + 220362782588269841 y_6^2,$
 $9626526504455407800 + 7237793237877709 x_4 y_5 - 11654247210807454 y_4 y_6 + 2407925458587456 y_5 y_6 + 4711234195153269 y_6^2, -8918559776506870 + 10340821979800 x_4^2 + 4995526587158 y_4 y_6 - 3479334415832 y_5 y_6 - 758096085663 y_6^2,$
 $-300672084082540 + 1551123296970 x_4 x_5 + 149773993326 y_4 y_6 - 104316091704 y_5 y_6 - 22728950811 y_6^2, 183915767292555966722540 + 174335218625062302600 x_3 x_5 + 235206639361986544200 y_3 y_4 - 373797649849459734600 y_3 y_5 - 10698584787241926744 y_4 y_6 + 74514575393591396184 y_5 y_6 + 1623563623941393631 y_6^2,$
 $-144400 + 3721 x_4^2, 357567213854333977420 + 1452793488542185855 x_3 x_4 + 200166897244367300 y_3 y_4 - 466475163532021800 y_3 y_5 - 231327130883953608 y_4 y_6 + 161117038165561632 y_5 y_6 + 35105046359195988 y_6^2,$
 $9067979396910513464107420720 + 51474452003781039299784510 x_4^2 + 138894859733966571444653340 y_3 y_4 - 25496580526547734640868400 y_3 y_5 - 67905388043201179181608522 y_4 y_6 + 47295425120253709107486888 y_5 y_6 + 10304981461478204405336817 y_6^2,$
 $159169454622233519170760 y_4 - 137907874153848594367680 y_5 - 86259006655879381704216 y_6 + 13578250518888213564 y_5 y_6^2 - 779951841202959831 y_6^3, 11029016171367084320 y_4 + 384574641780858240 y_5 - 54167270059963432992 y_6 + 13969393537950837 y_4 y_6^2 - 3603700272555999 y_6^3,$
 $18648760081979212609479828111392750024 x_4 - 52690531731568121064229154664976833600 x_5 - 32187401601315921593829436521518374320 x_6 + 4307591983972165598791260195322320 x_4 y_6^2 + 2877772154692604772990268325141775 x_6 y_6^2,$
 $-257179428693661230978777416598296 x_4 + 3496645383801397426849925726400 x_5 - 36790048109925661252832162676720 x_6 + 23324626293979677075347954274 x_4 y_6^2 + 3551286001400261941031098695 x_6 y_6^2,$
 $-47107807737368028505624009623532122504 x_4 + 54454751305520251428435498473750318400 x_5 + 15808610385523434597478016809327596720 x_6 + 8615183967944331197582520390644640 x_6 y_5 y_6 - 453460037591707790585103069270845 x_6 y_6^2,$
 $174064368872402392758425985205722950544323181112973803520 x_3 - 328533257852408024583685691166035964200386960500669460504 x_4 + 382966367376046345000869962179268144707048918798438334400 x_5 + 187183557545404806625966321851248847938225030553975058320 x_6 +$
 $67186369273838689395674342540429372680634201796438960 x_1 y_3 y_6 - 2460995814910012532185581431264096684179169011839291888 x_3 y_4 y_6 + 419479133075724968471609973052005526557005825827834752 x_5 y_5 y_6 + 1052636531787397306569591876268159257725983136014535088 x_3 y_6^2 -$
 $11612088525680422678413327697246770852051993934658655 x_6 y_6^2, 270728339322056794394817750592286448495802800 y_3 + 13372596306584928516485657584557440780931520 y_4 - 11091765860717215993455417411374572591453440 y_5 - 11204424837627177276816460467296850809136288 y_6 +$
 $2272754520815607263961374820033137669028 x_1 x_6 y_6 - 42967913139410561775759067077083934887676 y_1 y_4 y_6 + 13511801305619048686325711168231430036192 y_1 y_5 y_6 + 16453163390892733280276491100686062836076 y_1 y_6^2 + 659147689650384081777468135536362098549 y_6^3,$
 $77964390676877421510356332354455846998086738560 x_3 - 12085468953337448021353439387364288426439044440 x_4 + 186183134455701258408299416436385335154156401600 x_5 + 2684783563356734852569024451506922533375328400 x_6 + 7036856730120217229491937935997713434140400 x_6 y_3 y_5 -$
 $992372742742923526786948896370519194869941224 x_3 y_4 y_6 + 18180172740970672983975618042612463336634496 x_3 y_5 y_6 + 41281403064838403287956847767267129494641764 x_3 y_6^2 - 49121574228348091900995786488645506557975 x_5 y_6^2,$
 $2235248229152628552502961629086757586400 y_3 + 534946583457078989180280841952060 y_4 - 783253481295086853730023762615051112800 y_5 + 236284999097134463488971983743264440 x_3 x_5 y_6 - 252690177223739254467907155166438528620 y_6 -$
 $2140835662094295188444167413623800494 y_3 y_4 y_6 + 713097790287123261238714201977120900 y_3 y_5 y_6 + 72970995525292500807124363782969659 y_3 y_6^2 + 20045471751910230998762551780152135 y_6^3,$
 $-575099246212105803813176299178240 + 729101203653285392088015461856 y_4 y_6 - 4610511911314891975973128704 y_5 y_6 - 505707382501351883017058977776 y_6^2 + 13123482298230970289607795 y_6^3,$
 $-1091706827114462264842468599383625871840 + 1590629126295181590633923196461001700 x_1 x_6 y_6 - 6050661498115735161853090826351591100 y_1 y_4 + 9304583551297499744849829521026533600 y_3 y_5 -$
 $5146163393190773032342064128362194900 y_3 y_6 - 486402091667964809131308039721562834 y_4 y_6 - 705632474670196228824804529039414464 y_5 y_6 + 630773249832683811150579327830021099 y_6^2 + 432370854407630395583642521296000 y_3 y_6^3,$
 $14713359828323623156689409455699757562922988000 x_6 y_5 + 3357328092238467262278036295784680117362807408 x_4 y_6 - 1091001539576584819394400560924874217221789440 x_5 y_6 - 5722208059670509922132926740594076164658163760 x_6 y_6 + 4578238372039125066747094705321150022575 x_6 y_6^3,$
 $2386514291085609031796839547725665484575789835151000 x_6 y_3 - 903069950874432428125779089349100292549138812835000 x_3 y_4 + 14404561418006026100126507952980848565710133979096000 x_3 y_5 -$
 $72976164572272673464340161046222618242116635112400 x_4 y_5 - 16978233915356929086302506782449590987384587405041000 x_3 y_6 - 385514581223719753009985791535811742671613959520739 x_4 y_6 +$
 $791982996770780785943174242977842085121827888951720 x_5 y_6 + 4420425961349323962725311751131731831618132289089580 x_6 y_6 + 1410909110988817122798124198225117657463549046000 x_3 y_6^3\}$

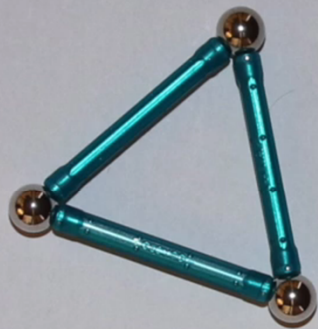
GröbnerBasis

$$\{x_2 + 21\,733 x_4, 212 + y_5^2 + 10\,295 y_4 y_6 + 12\,793 y_5 y_6 + 21\,175 y_6^2, 23\,816 + y_4 y_5 + 25\,913 y_4 y_6 + 4627 y_5 y_6 + 17\,449 y_6^2, \\ x_5 y_5 + 11\,129 x_6 y_5 + 17\,688 x_4 y_6 + 27\,437 x_5 y_6 + 12\,399 x_6 y_6, x_4 y_5 + 2780 x_6 y_5 + 22\,105 x_4 y_6 + 15\,416 x_5 y_6 + 10\,857 x_6 y_6, \\ 16\,065 + y_4^2, x_6 y_4 + 18\,665 x_6 y_5 + 20\,199 x_4 y_6 + 29\,731 x_5 y_6 + 26\,240 x_6 y_6, x_5 y_4 + 31\,348 x_6 y_5 + 27\,516 x_4 y_6 + 4328 x_5 y_6 + 5000 x_6 y_6, \\ x_4 y_4 + 24\,970 x_6 y_5 + 21\,908 x_4 y_6 + 7003 x_5 y_6 + 12\,047 x_6 y_6, 20\,131 + y_3^2 + 28\,696 y_3 y_5 + 9760 y_4 y_6 + 4739 y_5 y_6 + 9110 y_6^2, \\ x_5 y_3 + 3224 x_3 y_4 + 12\,942 x_3 y_5 + 2136 x_6 y_5 + 17\,188 x_4 y_6 + 2825 x_5 y_6 + 19\,154 x_6 y_6, \\ x_4 y_3 + 17\,413 x_3 y_4 + 6179 x_3 y_5 + 22\,498 x_6 y_5 + 5926 x_4 y_6 + 32\,333 x_5 y_6 + 14\,623 x_6 y_6, \\ x_3 y_3 + 29\,670 x_3 y_4 + 3222 x_3 y_5 + 12\,460 x_6 y_5 + 3532 x_4 y_6 + 29\,749 x_5 y_6 + 8889 x_6 y_6, 4529 + x_6^2 + 19\,393 y_4 y_6 + 19\,651 y_5 y_6 + 13\,194 y_6^2, \\ 26\,077 + x_5 x_6 + 21\,659 y_4 y_6 + 12\,710 y_5 y_6 + 15\,533 y_6^2, 1673 + x_4 x_6 + 26\,057 y_4 y_6 + 26\,185 y_5 y_6 + 22\,956 y_6^2, 6594 + x_5^2 + 13\,630 y_4 y_6 + 25\,693 y_5 y_6 + 29\,417 y_6^2, \\ 27\,494 + x_4 x_5 + 2409 y_4 y_6 + 14\,616 y_5 y_6 + 7847 y_6^2, 8641 + x_3 x_5 + 27\,346 y_3 y_4 + 18\,987 y_3 y_5 + 15\,908 y_4 y_6 + 31\,365 y_5 y_6 + 25\,442 y_6^2, 13\,950 + x_4^2, \\ 21\,222 + x_3 x_4 + 18\,414 y_3 y_4 + 6125 y_3 y_5 + 24\,623 y_4 y_6 + 19\,455 y_5 y_6 + 10\,680 y_6^2, 22\,943 + x_3^2 + 21\,973 y_3 y_4 + 9276 y_3 y_5 + 30\,850 y_4 y_6 + 19\,505 y_5 y_6 + 23\,901 y_6^2, \\ 9091 y_4 + 6783 y_5 + 5135 y_6 + y_5 y_6^2 + 17\,195 y_6^3, 23\,483 y_4 + 5992 y_5 + 7264 y_6 + y_4 y_6^2 + 25\,159 y_6^3, 18\,265 x_4 + 22\,411 x_5 + 5962 x_6 + x_5 y_6^2 + 15\,719 x_6 y_6^2, \\ 11\,992 x_4 + 15\,696 x_5 + 2676 x_6 + x_4 y_6^2 + 27\,884 x_6 y_6^2, 9848 x_4 + 19\,580 x_5 + 13\,964 x_6 + x_6 y_5 y_6 + 30\,033 x_6 y_6^2, \\ 29\,575 x_3 + 23\,767 x_4 + 30\,871 x_5 + 25\,991 x_6 + x_6 y_3 y_6 + 9840 x_3 y_4 y_6 + 10\,597 x_3 y_5 y_6 + 4228 x_3 y_6^2 + 25\,839 x_6 y_6^2, \\ 566 y_3 + 27\,110 y_4 + 24\,326 y_5 + 3888 y_6 + x_3 x_6 y_6 + 31\,771 y_3 y_4 y_6 + 24\,150 y_3 y_5 y_6 + 18\,681 y_3 y_6^2 + 17\,921 y_6^3, \\ 30\,861 x_3 + 11\,495 x_4 + 14\,275 x_5 + 20\,445 x_6 + x_6 y_3 y_5 + 14\,731 x_3 y_4 y_6 + 22\,971 x_3 y_5 y_6 + 13\,750 x_3 y_6^2 + 1198 x_6 y_6^2, \\ 4441 y_3 + 29\,085 y_4 + 6283 y_5 + x_3 x_6 y_5 + 30\,109 y_6 + 18\,919 y_3 y_4 y_6 + 7971 y_3 y_5 y_6 + 11\,408 y_3 y_6^2 + 7410 y_6^3, 19\,760 + 14\,566 y_4 y_6 + 3906 y_5 y_6 + 30\,277 y_6^2 + y_6^4, \\ 24\,366 + 2393 x_3 x_6 + 3613 y_3 y_4 + 13\,102 y_3 y_5 + 7037 y_3 y_6 + 3551 y_4 y_6 + 31\,260 y_5 y_6 + 15\,051 y_6^2 + y_3 y_6^3, 3634 x_6 y_5 + 21\,392 x_4 y_6 + 11\,643 x_5 y_6 + 24\,110 x_6 y_6 + x_6 y_6^3, \\ 27\,397 x_6 y_3 + 29\,205 x_3 y_4 + 14\,228 x_3 y_5 + 12\,425 x_6 y_5 + 6814 x_3 y_6 + 12\,306 x_4 y_6 + 19\,056 x_5 y_6 + 17\,799 x_6 y_6 + x_3 y_6^3\}$$

Stabile 3D Graphen

- Einfachster stabiler 3D Graph:
 - Tetraeder
- Weitere stabile 3D Graphen
 - + 3 Kanten & 1 Knoten
 - + 4 Kanten & 1 Knoten – 1 zuvor schon vorhandene Kante
- $|E|=3|V|-6$





FACHWERK MATHEMATIK

Bahara
Felix
Francesca
Georg
Maria
Maxi
Tobias

